چهاردهمین کنفرانس بین المللی
مهندسی حمل و نقل و ترافیک
The 14th International
Conference on Traffic and
Transportation Engineering

حل مسئله تخصیص ترافیک با چند کلاس استفاده‌کننده توسط الگوریتم خطی‌سازی–تصویر گرادیان

عباس بابازاده[۱] ، امیرحسین فانی[۲]
۱- استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران

چکیده

مسئله برآورد جریان ترافیک روی کمان‌های یک شبکه حمل و نقل به مسئله تخصیص ترافیک معروف است. مسئله تخصیص ترافیک در دو حالت یک کلاسی یا چندکلاسی بررسی شده است. در تخصیص ترافیک یک کلاسی (استاندارد)، تمام استفاده‌کنندگان زمان سفرهای یکسانی را روی کمان-های شبکه تجربه می کنند. ولی، در تخصیص ترافیک چندکلاسی، کلاس‌های مختلف استفاده-کنندگان دارای زمان سفرهای متفاوتی روی کمان‌های شبکه هستند. یک حالت خاص از تخصیص چندکلاسی زمانی رخ می‌دهد که استفاده‌کنندگان مربوط به هر کلاس فقط می‌توانند روی زیرشبکه ای خاص از شبکه اصلی حرکت کنند (مانند ماشین های بدون آرم که اجازه ورود به محدوده طرح ترافیک شهر تهران را ندارند). در این مقاله، با ایجاد تغییراتی در الگوریتم‌های استاندارد فرانک-ولف (FW) و خطی‌سازی- تصویر گرادیان (GPL)، نسخه‌های چند کلاسی آن‌ها ارایه می‌شود. شبکه تهران با محدوده طرح ترافیک و دو کلاس استفاده کننده - وسایل نقلیه آرم‌دار و بدون آرم - جهت آزمایش الگوریتم‌ها در نظر گرفته می‌شود. مقایسه نتایج االگوریتمهای FW و GPL استاندارد و چندکلاسی برای شبکه تهران نشان می‌دهد که ۱) الگوریتم GPL هم در حالت استاندارد و هم چند کلاسی به مراتب از الگوریتم FW سریعتر است، و ۲) نتایج الگوریتم‌های چندکلاسی، اختلاف زیادی با نتایج حالت استاندارد دارند.

کلید واژه: *مسئله تخصیص ترافیک، تخصیص چندکلاسی، فرانک-ولف، خطی‌سازی، تصویر گرادیان*

---

[۱] استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران، ۶۱۱۱۲۱۷۶، ababazadeh@ut.ac.ir
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران- مهندسی راه و ترابری ، ۰۹۱۲4855545،amir.fani@ut.ac.ir

۱- مقدمه

مسئله‌ی تعیین جریان ترافیک در هر وضعیت مفروض از شبکه و تقاضای حمل و نقل، به مسئله تخصیص ترافیک[۱] (TAP) معروف است. مسئله تخصیص ترافیک تعادلی نوعی مسئله تخصیص ترافیک برای تعیین جریان‌های تعادلی در کمان‌های شبکه است که بر اساس قانونی به نام قانون تعادل استفاده‌کننده[۲] (UE) بیان می‌شود. تعادل استفاده‌کننده حالت پایداری از جریان در شبکه است که هیچ استفاده‌کننده‌ای نمی‌تواند به تنهایی با تغییر مسیر خود زمان سفرش را بهبود دهد. در ادامه مسئله تخصیص ترافیک تعادلی به اختصار مسئله تخصیص ترافیک نامیده می‌شود. مسئله تخصیص ترافیک یک کلاسی به صورت مدل $UE-S$ زیر بیان می‌شود [۱]:

$$
\begin{array}{ll}
[UE-S] & \\
(T_k(f)-u_{rs})f_k = 0 & \forall k \in K_{rs}, rs \in I \\
T_k(f)-u_{rs} \ge 0 & \forall k \in K_{rs}, rs \in I \\
\sum_{k\in K_{rs}} f_k = d_{rs} & \forall rs \in I \\
f \ge 0 &
\end{array}
\qquad (۱)
$$

در معادلات بالا A نشان‌دهنده مجموعه کمان‌های شبکه و $a \in A$ یک کمان از مجموعه A است. I نشان‌دهنده مجموعه زوج‌های مبدأ-مقصد شبکه و $rs \in I$ یک زوج مبدأ-مقصد متعلق به مجموعه I می‌باشد. همچنین K_{rs} مجموعه مسیرهای بین زوج rs و $k \in K_{rs}$ یک مسیر متعلق به مجموعه مسیرهای K_{rs} است. d_{rs} تقاضای ثابت بین زوج مبدأ-مقصد rs، x_a جریان در کمان a، $t_a(x)$ زمان سفر کمان a به صورت تابعی از بردار $x=(x_a)$، f_k جریان در مسیر k، $T_k(f)$ زمان سفر مسیر k به صورت تابعی از بردار $f=(f_k)$ و u_{rs} کمترین زمان سفر بین زوج مبدأ-مقصد rs است.

مسئله تخصیص ترافیک در ادبیات حمل و نقل در حالت یک کلاسی[۳] یا چندکلاسی[۴] مورد بررسی قرار گرفته است. کلاس‌های مختلف بر اساس سطح دسترسی کاربران به نقاط مختلف شبکه در نظر گرفته می‌شوند: مانند تعیین باندهای مخصوص برای عبور وسایل پرسرنشین و یا تعیین محدوده مجاز برای ورود انواع خاصی از وسایل نقلیه. برای حل مسئله تخصیص ترافیک یک کلاسی تاکنون الگوریتم‌های گوناگونی معرفی شده‌اند. این الگوریتم‌ها را می‌توان به سه گروه الگوریتم‌های بر پایه

[1] Traffic Assignment Problem
[2] User Equilibrium
[3] Single-Class
[4] Multiclass

کمان[۱]، بر پایه مسیر[۲] و بر پایه مبدأ[۳] تقسیم کرد. همچنین مسئله تخصیص ترافیک چندکلاسی نیز به کمک انجام تغییراتی در الگوریتم‌های معرفی‌شده برای مسئله یک کلاسی قابل حل است. [۲]

الگوریتم فرانک-ولف[۴] (FW) [۳] از جمله الگوریتم‌های بر پایه کمان محسوب می‌شود. این الگوریتم روشی تکراری است که در آن از جستجوی خطی برای یافتن اندازه‌ی گام حرکت در هر تکرار استفاده می‌شود. در هر تکرار این الگوریتم، جهت نزول از تفاضل بین جواب حاصل از تخصیص همه یا هیچ و جواب مرحله قبل بدست می‌آید. الگوریتم FW معمولا نمی‌تواند به درجات بالایی از دقت برسد.

نوع دیگری از روش‌های حل مسئله تعادل استفاده‌کننده الگوریتم‌های بر پایه مسیر هستند. این گروه از الگوریتم‌ها مسئله تخصیص را بر حسب جریان در مسیرها حل می‌کنند و اطلاعات مربوط به مسیرهای با جریان مثبت را ذخیره می‌کنند. الگوریتم خطی‌سازی آشتیانی[۵] (AL) [۴]، الگوریتم خطی‌سازی- تصویر گرادیان[۶] (GPL) [۵]، الگوریتم فرانک-ولف بر پایه مبدأ-مقصد[۷] (ODBFW) (ODBFW) [۶] و الگوریتم تصویر گرادیان جایاکریشنان و همکاران[۸] (JGP) [۷] از جمله این الگوریتم‌ها هستند.

آشتیانی [۳] در الگوریتم AL نشان داد با این فرض که تابع زمان سفر هر کمان شبکه مثبت باشد، مدل تعادل استفاده‌کننده معادل با یک مسئله تکمیلی غیرخطی[۹] (NCP) است. آشتیانی از سه ایده تجزیه مسئله بر حسب زوج‌های مبدأ-مقصد ، خطی‌سازی زیرمسئله غیرخطی و تولید مسیر برای حل NCP استفاده می‌کند.

جوانی [۵] سعی کرد با ایجاد تغییراتی در الگوریتم AL نرخ همگرایی آن را افزایش دهد. کوشش او به ارائه الگوریتم خطی‌سازی- تصویر گرادیان (GPL) منجر شد که دو تفاوت با الگوریتم AL دارد. تفاوت اول آن است که زیرمسئله تکمیلی خطی LCP_{rs} با استفاده از روش تصویر گرادیان روزن [۸] به جای روش لمکه [۹] حل می‌شود. تفاوت دیگر در محاسبه خطای جواب هر زوج مبدأ-مقصد و استفاده از معیار ضعیف‌تر شکاف نسبی[۱۰] (RG) به جای معیار Error در محاسبه این خطا است.

[1] Link-Based Algorithms
[2] Path-Based Algorithms
[3] Origin-Based Algorithms
[4] Frank-Wolfe
[5] Ashtiani's Linearization
[6] Gradient Projection Based Linearization Algorithm
[7] Origin-Destination Based Frank-Wolfe
[8] Jayakrishnan's Gradient Projection
[9] Nonlinear Complementarity Problem (NCP)
[10] Relative Gap

در کتابچه راهنمای نرم‌افزار EMME [۲] یک حالت ساده‌شده از مسئله تخصیص ترافیک چندکلاسی با تقاضای ثابت معرفی شده است. در این حالت فرض شده است که M مجموعه کلاس‌ها و زمان سفر کلاس $m \in M$ روی کمان a برابر است با $t_a^m(x_a) = t_a(x_a) + b_a^m$ که در آن $x_a = \sum_{m \in M} x_a^m$ و x_a^m جریان در کمان a برای کلاس m است. این تابع زمان سفر نشان می‌دهد که همه کلاس‌ها تحت تأثیر جریان کل در کمان هستند، اما هر کدام یک زمان ثابت اضافی (b_a^m) را نیز تجربه می‌کنند. این مسئله تخصیص چندکلاسی معادل با مسئله بهینه‌سازی محدب زیر است:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Min} Z = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w)dw + \sum_m \sum_a x_a^m b_a^m \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{k \in K_{rs}^m} f_k^m = d_{rs}^m && \forall rs \in I, m \in M \\
&\qquad f_k^m \ge 0 && \forall rs \in I, m \in M, k \in K_{rs}^m \\
&\qquad x_a^m = \sum_{rs \in I} \sum_{k \in K_{rs}^m} f_k \delta_{ak}^{rs,m} && \forall a \in A, m \in M \\
&\qquad x_a = \sum_m x_a^m
\end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن K_{rs}^m مجموعه مسیرهای بین زوج rs برای کلاس m، d_{rs}^m تقاضای ثابت کلاس m بین زوج مبدأ-مقصد rs، f_k^m جریان مسیر k برای کلاس m و سایر تعاریف مشابه تعاریف پیشین است. مسئله فوق را می‌توان تعمیم مدل تعادل استفاده‌کننده در حالت چندکلاسی دانست. برای نشان دادن این موضوع کافی است شرایط کراش-کان-تاکر (KKT) برای آن نوشته شود. پس از نوشتن شروط کراش-کان-تاکر، مسئله (۲) معادل شرایط $UE-M$ زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&[UE-M] \\
&(T_k^m(f) - u_{rs}^m) f_k^m = 0 && \forall rs \in I, k \in K_{rs}^m, m \in M \\
&T_k^m(f) - u_{rs}^m \ge 0 && \forall rs \in I, k \in K_{rs}^m, m \in M \\
&\sum_{k \in K_{rs}^m} f_k^m = d_{rs}^m && \forall rs \in I, m \in M \\
&f \ge 0
\end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن $x_a = \sum_{m \in M} \sum_{rs \in I} \sum_{k \in K_{rs}^m} f_k^m \delta_{ak}$ و $T_k^m(f) = \sum_{a \in A} (t_a(x_a(f)) + b_a^m) \delta_{ak}$ می‌باشند. در روابط بالا، $T_k^m(f)$ زمان سفر مسیر k برای کلاس m به صورت تابعی از $f = (f_k^m)$ و u_{rs}^m کمترین زمان سفر از مبدأ r به مقصد s برای کلاس m است.

درحالت وجود چندکلاس استفاده‌کننده هم قضیه‌های اثبات‌شده توسط آشتیانی [۳] قابل استفاده هستند و با این فرض که توابع زمان سفر کمان‌ها برای هر کلاس مثبت باشند، مدل تعادل استفاده‌کننده $UE-M$ معادل یک مسئله تکمیلی غیرخطی است.

۲- تعریف مسأله

یک حالت خاص از مسئله تخصیص چندکلاسی زمانی رخ می‌دهد که $b_a^m = 0$ یا $b_a^m = \infty$ برای تمام کمان‌های a و تمام کلاس‌های $m \in M$ است. در این حالت استفاده‌کنندگان مربوط به کلاس‌های مختلف زمان‌سفرهای یکسانی را تجربه می‌کنند، ولی هرکدام تنها توانایی دسترسی به زیرشبکه‌ای خاص را دارند (مانند ماشین های دارا یا فاقد مجوز ورود به طرح ترافیک در شهر تهران). در این حالت استفاده‌کنندگان مربوط به هر کلاس m در حالت $b_a^m = 0$ اجازه استفاده از کمان a را دارند ولی در حالت $b_a^m = \infty$ مجاز به استفاده از کمان نمی‌باشند. در این حالت خاص می‌توان نشان داد که ترم دوم تابع هدف مسئله $B-M$ همیشه برابر صفر است و لذا مسئله به صورت زیر قابل بیان است:

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Min} Z = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w)\,dw \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{k \in K_{rs}^m} f_k^m = d_{rs}^m && \forall rs \in I, m \in M \\
& f_k^m \geq 0 && \forall rs \in I, m \in M, k \in K_{rs}^m \\
& x_a^m = \sum_{rs \in I} \sum_{k \in K_{rs}^m} f_k \delta_{ak}^{rs,m} && \forall a \in A, m \in M \\
& x_a = \sum_m x_a^m
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

در این مقاله، مسئله تخصیص چندکلاسی در حالت خاص مذکور با ایجاد تغییراتی در الگوریتم بر پایه کمان FW و الگوریتم بر پایه مسیر GPL حل شده است و نتایج آن‌ها بررسی و مقایسه شده است.

۳- الگوریتم‌های تخصیص ترافیک چندکلاسی

هدف از این بخش، تعمیم الگوریتم‌های فرانک-ولف (FW) و خطی‌سازی-تصویر گرادیان (GPL) و معرفی دو نسخه مختلف از این الگوریتم برای حل مسئله تخصیص ترافیک چندکلاسی است.

۳-۱- الگوریتم فرانک-ولف چندکلاسی

الگوریتم FW چندکلاسی به صورتی مشابه با نسخه استاندارد یک‌کلاسی آن با در نظر گرفتن نکاتی قابل بیان است. در مرحله تعیین جهت حرکت، مسئله روی کلاس‌های m قابل تجزیه است و حل زیرمسئله مربوط به هر کلاس m معادل یک تخصیص همه یا هیچ با زمان‌های $t_a = t_a(x_a)$ روی زیرشبکه‌ای از شبکه اصلی شامل کمان‌های a با $b_a^m = 0$ است. در مرحله محاسبه اندازه گام نیازی

به ذخیره‌سازی جریان‌های x_a^m مربوط به هر کلاس نیست، بلکه جریان کلی x_a برای این منظور کافی می‌باشد و اندازه گام α در هر تکرار مشابه الگوریتم FW یک کلاسی محاسبه می‌شود.

۳-۲- الگوریتم خطی‌سازی-تصویر گرادیان جدا[1]

در بخش مقدمه بیان شد که درحالت وجود چندکلاس استفاده‌کننده هم قضیه‌های اثبات‌شده توسط آشتیانی [۴] قابل استفاده است. با ایجاد تغییراتی در الگوریتم خطی‌سازی-تصویر گرادیان، در ادامه دو الگوریتم برای تخصیص چندکلاسی معرفی می‌شوند. در الگوریتم اول که $GPL-D$ نامگذاری می‌شود، برای انجام تخصیص با m کلاس استفاده‌کننده، ابتدا جریان‌های مربوط به همه کلاس‌ها به جز کلاس ۱ ثابت فرض می‌شوند و یک تکرار کامل الگوریتم GPL برای کلاس ۱ انجام می‌شود. این روند برای تمامی کلاس‌ها ادامه پیدا می‌کند و در نهایت، در آخرین مرحله، با ثابت فرض کردن جریان‌های همه کلاس‌ها به جز کلاس m، یک تکرار الگوریتم GPL برای کلاس m انجام می‌شود. در این الگوریتم، زیرمسئله تکمیلی غیرخطی مربوط به هر زوج مبدأ-مقصد rs و هر کلاس m، مشابه حالت یک کلاسی، در جواب فعلی $\bar{f}$ خطی‌سازی و حل می‌شود.

۳-۳- الگوریتم خطی‌سازی-تصویر گرادیان باهم[2]

در این الگوریتم که $GPL-T$ نامیده می‌شود، برای انجام تخصیص چندکلاسی زیرمسئله تکمیلی غیرخطی مربوط به هر زوج مبدأ-مقصد، بدون آن که روی مجموعه M تجزیه شود، خطی‌سازی و حل می‌شود. تفاوت این الگوریتم با الگوریتم $GPL-D$ در مرحله تشکیل ماتریس‌های M، q و یافتن جهت حرکت d است. در هر تکرار الگوریتم $GPL-T$ زیرمسئله تکمیلی غیرخطی مربوط به هر زوج مبدأ-مقصد rs، در جریان فعلی $\bar{f}$ به صورت زیر خطی‌سازی می‌شود:

[1] GPL-Separated
[2] GPL-Together

$$
\begin{array}{ll}
(T_k^m(\bar{f})+\sum_{d\in M}\sum_{k'\in K_{rs}^{d+}}(f_{k'}^d-\bar{f}_{k'}^d)\times\frac{\partial T_k^m(\bar{f})}{\partial f_{k'}^m}-u_{rs}^m)\times f_k^m=0 & \forall k\in K_{rs}^{m+},\forall m\in M \\
T_k^m(\bar{f})+\sum_{d\in M}\sum_{k'\in K_{rs}^{d+}}(f_{k'}^d-\bar{f}_{k'}^d)\times\frac{\partial T_k^m(\bar{f})}{\partial f_{k'}^m}-u_{rs}^m\geq 0 & \forall k\in K_{rs}^{m+},\forall m\in M \\
(\sum_{k\in K_{rs}^{m+}} f_k^m-D_{rs}^m)\times u_{rs}^m=0 & \forall m\in M \\
\sum_{k\in K_{rs}^{m+}} f_k^m-D_{rs}^m\geq 0 & \forall m\in M \\
f_k^m\geq 0\ ,\ u_{rs}^m\geq 0 & \forall k\in K_{rs}^{m+},\forall m\in M
\end{array}
\qquad (۵)
$$

مسئله تکمیلی خطی فوق، معادل مسئله بهینه‌سازی زیر است:

$$
\begin{cases}
\min & \frac{1}{2}z^T M z+q^T z \\
\text{s.t.} & \sum_{1}^{c-1} z_j=d_{rs}^1\ ,\ \sum_{c}^{c+d-2} z_j=d_{rs}^2\ ,\ z\geq 0
\end{cases}
\qquad (۶)
$$

در روش تصویر گرادیان روزن [۸]، برای حل مسائل بهینه‌سازی، تصویر جهت عکس گرادیان روی مرز مشترک محدودیت‌های فعال در هر تکرار به عنوان یک جهت نزول امکانپذیر مورد استفاده قرار می‌دهد. این جهت نزول از رابطه $d=-Pg$ محاسبه می‌گردد.

در حالت خاص $M=\{1,2\}$ و با فرض این که کلاس ۱ دارای $c-1$ مسیر فعال و کلاس ۲ دارای $d-1$ مسیر فعال است، d بردار $c+d$ بعدی جهت، g بردار $c+d$ بعدی گرادیان وماتریس $(c+d)\times(c+d)$ بعدی P ماتریس تصویر[1] است که از رابطه $P=I-A_q^T(A_qA_q^T)^{-1}A_q$ بدست می‌آید. در رابطه ماتریس تصویر، A_q طبق تعریف ماتریس ضرایب محدودیت‌های موثر است که در حالت یک کلاسی به صورت $A_q=[1,1,....,0]_{1\times c}$ و در حالت دوکلاسی به صورت زیر تعریف می‌شود که در واقع همان ماتریس ضرایب در محدودیت بقای جریان برای کلاس ۱ و کلاس ۲ است.

$$
A_q=\begin{bmatrix} \overbrace{1,1,...,1}^{c-1},\overbrace{0,0,...,0}^{d-1},0,0 \\ 0,0,...,0,1,1,...,1,0,0 \end{bmatrix}_{2\times(c+d)} \qquad (۷)
$$

با تعریف ماتریس w به صورت $w=Mz+q=g$ اجزای جهت نزول d به صورت زیر بدست می‌آیند:

[1] Projection Matrix

$$d_i = \begin{cases} \frac{1}{d-1}\left(\sum_{j=1}^{c-1} w_j\right) - w_i & i=1,\ldots,c-1 \\ \frac{1}{c-1}\left(\sum_{j=c}^{c+d-2} w_j\right) - w_i & i=c,\ldots,c+d-2 \\ -w_i = \sum_{k\in K_{rs}^{1+}} f_k^1 - d_{rs}^1 = 0 & i=c+d-1 \\ -w_i = \sum_{k\in K_{rs}^{2+}} f_k^2 - d_{rs}^2 = 0 & i=c+d \end{cases} \quad (\text{۸})$$

در هر تکرار این الگوریتم، حرکت به جواب بعدی به صورت $z = z + \alpha\, d$ انجام می‌شود و اندازه گام با حل مسئله بهینه‌سازی تک متغیره زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(\alpha) = \frac{1}{2}(z+\alpha d)^T M\,(z+\alpha d) + q^T(z+\alpha d) \\ &\text{s.t.} \quad 0 \le \alpha \le \min\left(\frac{-z_i}{d_i} \middle| d_i \le 0\right) \end{aligned} \quad (\text{۹})$$

۴- نتایج عددی

در این بخش، عملکرد الگوریتم‌های تخصیص ترافیک FW، $GPL-D$ و $GPL-T$ در حالت استاندارد و چندکلاسی ارزیابی می‌شوند. برنامه‌های کامپیوتری این الگوریتم‌ها در محیط برنامه‌نویسی C++ نوشته و توسط نرم‌افزار Microsoft Visual Studio 2013 با استفاده از یک کامپیوتر لپ‌تاپ دارای پردازشگر ۷ هسته‌ای 2.4 GHZ و 8 GB حافظه RAM اجرا شده‌اند.

۴-۱- شبکه تهران

شبکه تهران در این پژوهش به عنوان یک شبکه بزرگ برای آزمایش الگوریتم‌های معرفی شده به کار می‌رود. بر اساس اطلاعات کسب شده از شرکت مطالعات جامع حمل‌ونقل و ترافیک شهر تهران [۱۱]، شبکه تهران در سال ۱۳۹۱ شامل ۶۵۰ ناحیه ترافیکی، ۸۰۲۱ گره، ۱۷۷۹۰ کمان، و ۱۱۷۴۱۳ زوج مبدأ- مقصد با تقاضای مثبت است. شبکه تهران و محدوده مورد مطالعه آن در این پژوهش، در شکل ۱ نشان داده شده است. در این شبکه منظور از کلاس ۱، استفاده‌کنندگانی از شبکه هستند که به تمام نقاط شبکه دسترسی دارند و منظور از کلاس ۲ کاربرانی هستند که اجازه ورود به محدوده ترافیکی مشخص‌شده در شبکه را ندارند. برای مسئله دوکلاسی در این شبکه، محدوده طرح ترافیک شهر تهران به عنوان محدوده غیرمجاز برای کلاس ۲ (وسایل بدون آرم) در نظر گرفته می‌شود.

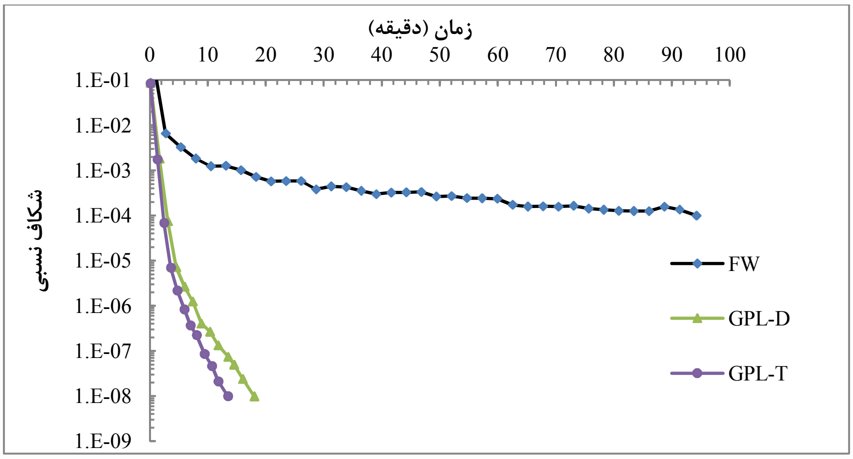
شکل ۱. شبکه شهر تهران و محدوده ترافیکی مورد مطالعه

تابع زمان‌سفر کمان‌های این شبکه برای تخصیص چندکلاسی به صورت زیر می‌باشد:

$$t_a = A_a \times (1 + 0.15 \times (\frac{(x_a + B_a)}{C_a})^4) + b_a^m \qquad (۱۰)$$

b_a^1 برای تمامی کمان‌های شبکه برابر صفر است و b_a^2 برای کمان‌های خارج محدوده برابر صفر و برای کمان‌های داخل محدوده بینهایت می‌باشد.

تخصیص شبکه تهران با دو کلاس استفاده‌کننده توسط الگوریتم‌های FW، $GPL-D$ و $GPL-T$ چندکلاسی حل شد. خلاصه نتایج این الگوریتم‌ها به ازای مقادیر مختلف شکاف نسبی در شکل ۲ و جدول ۱ ارائه شده است. شکل ۲ نشان می‌دهد که نرخ همگرایی الگوریتم‌های خطی‌سازی در حالت چندکلاسی، بسیار سریعتر از الگوریتم FW می‌باشد. الگوریتم $GPL-T$ سریعتر از سایر الگوریتم‌ها به جواب تعادلی دست می‌یابد. پس از آن، الگوریتم $GPL-D$ با عملکردی نزدیک در رتبه دوم و پس از آن‌ها الگوریتم FW با اختلاف زیاد در رتبه سوم قرار دارد. الگوریتم $GPL-D$ تا دقت $۱۰^{-۸}$ حدود ۱٫۳۴ برابر و الگوریتم FW تا دقت $۱۰^{-۴}$ حدود ۱۷٫۵۲ برابر کندتر از الگوریتم $GPL-T$ می‌باشند.



شکل ۲: نمودار زمان حل الگوریتم‌های تخصیص چندکلاسی به ازای مقادیر مختلف شکاف نسبی

نتایج الگوریتم‌های استاندارد FW و GPL به منظور مقایسه با نتایج نسخه‌های چندکلاسی آن‌ها، در جدول ۲ ارائه شده است. همانطور که در جدول ۲ مشهود است، عملکرد الگوریتم GPL استاندارد بسیار سریعتر از الگوریتم FW استاندارد است. مقایسه کل زمان سفر و سرعت شبکه در حالت استاندارد و دوکلاسی در جدول ۱ و ۲، نشان می‌دهد این مقادیر با یکدیگر اختلاف زیادی دارند. این اختلاف، لزوم اجرای تخصیص چندکلاسی برای بررسی تاثیر محدوده طرح ترافیک در شبکه تهران را نشان می‌دهد.

جدول ۱: نتایج الگوریتم‌های تخصیص چندکلاسی برای شبکه تهران

الگوریتم	شکاف نسبی	تعداد تکرار	زمان حل (دقیقه)	کل زمان سفر شبکه (وسیله-ساعت)	سرعت شبکه (کیلومتر بر ساعت)
فرانک-ولف FW	$۱۰^{-۲}$	۳۵	۱,۹۷	257498.۴۰	۳۶,۹۱۸
	$۱۰^{-۳}$	۲۳۶	۱۲,۳۸	254774.5۷	۳۷,۱۳
	$۱۰^{-۴}$	۱۸۰۵	۹۴,۲۲	254564.8۳	۳۷,۱۳۸
خطی‌سازی- تصویر گرادیان جدا GPL – D	$۱۰^{-۲}$	۱۱	۰,۷۸	255927.68	۳۷,۰۷۰
	$۱۰^{-۳}$	۲۵	۱,۷۸	254505.۹۰	۳۷,۱۵۱
	$۱۰^{-۴}$	۳۸	۲,۸۰	254555.7۸	۳۷,۱۴۷
	$۱۰^{-۵}$	۵۸	۴,۱۰	254558.7۱	۳۷,۱۴۱
	$۱۰^{-۶}$	۱۰۳	۷,۴۶	254558.۴۰	۳۷,۱۴۳
	$۱۰^{-۷}$	۱۶۹	۱۲,۱۲	254558.4۸	۳۷,۱۴۳
خطی‌سازی- تصویر گرادیان باهم GPL – T	$۱۰^{-۲}$	۱۰	۰,۵۷	255520.95	۳۷,۱۰۷
	$۱۰^{-۳}$	۲۲	۱,۲۹	254544.98	۳۷,۱۶۵
	$۱۰^{-۴}$	۳۵	۱,۹۹	254559.78	۳۷,۱۴۰
	$۱۰^{-۵}$	۵۴	۳,۲۱	254558.15	۳۷,۱۴۳
	$۱۰^{-۶}$	۹۵	۵,۵۴	254558.4۳	۳۷,۱۴۳
	$۱۰^{-۷}$	۱۵۳	۹,۶۸	254558.47	۳۷,۱۴۳

جدول ۲. نتایج الگوریتم‌های تخصیص استاندارد برای شبکه تهران

الگوریتم	شکاف نسبی	تعداد تکرار	زمان حل (دقیقه)	کل زمان سفر شبکه (وسیله-ساعت)	سرعت شبکه (کیلومتر بر ساعت)
فرانک-ولف FW	$۱۰^{-۲}$	۴۱	۱,۰۹۶	256492.08	۳۶,۹۳۳
	$۱۰^{-۳}$	۲۴۲	۶,۱۰۹	254189.03	۳۷,۱۲۵
	$۱۰^{-۴}$	۱۷۹۷	۴۴,۸۵۷	25397۳.25	۳۷,۱۳۳
خطی‌سازی- تصویر گرادیان GPL	$۱۰^{-۲}$	12	0.402	255000.28	۳۷,۰۲۵
	$۱۰^{-۳}$	24	0.741	253959.51	۳۷,۱۴۷
	$۱۰^{-۴}$	38	1.12۸	253954.90	۳۷,۱۳۹
	$۱۰^{-۵}$	64	1.849	253959.97	۳۷,۱۳۷
	$۱۰^{-۶}$	107	3.080	253960.15	۳۷,۱۳۷
	$۱۰^{-۷}$	180	5.168	253960.54	۳۷,۱۳۷

۵. نتیجه گیری

مسئله تخصیص ترافیک در حالت یک یا چندکلاسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. کلاس‌های مختلف بر اساس سطح دسترسی کاربران به نقاط مختلف شبکه در نظر گرفته می‌شوند. یک حالت خاص از تخصیص چندکلاسی زمانی رخ می‌دهد که استفاده‌کنندگان مربوط به هر کلاس تنها به زیرشبکه خاص آن کلاس دسترسی دارند. با ایجاد تغییراتی در الگوریتم‌های فرانک-ولف (FW) و خطی‌سازی- تصویر گرادیان (GPL)، مسئله تخصیص چندکلاسی در حالت خاص مذکور حل شد. برای مقایسه نرخ همگرایی این الگوریتم‌ها شبکه بزرگ تهران به کار گرفته شد. محدوده طرح ترافیک شهر تهران به عنوان محدوده غیرمجاز برای وسایل نقلیه بدون آرم در نظر گرفته شد. نتایج نشان دادند که الگوریتم $GPL-T$ سریعترین الگوریتم است و پس از آن الگوریتم‌های $GPL-D$ و FW به ترتیب ۱,۳۴ و ۱۷,۵۲ برابر کندتر از الگوریتم $GPL-T$ هستند. همچنین اختلاف کل زمان سفر و سرعت شبکه تهران در دو حالت استاندارد و دوکلاسی، نشان داد برای بررسی نتایج تخصیص شبکه تهران با در نظر گرفتن محدوده طرح ترافیک آن، اجرای تخصیص چندکلاسی این شبکه لازم می‌باشد.

۶. مراجع

۱. Sheffi, Y. (1985). Urban transportation networks: equilibrium analysis and mathematical programming methods. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

2. EMME/2 user's manual, (۲۰۰۵). Developed by Florian and others in Montreal.

3. Frank, M. and P. Wolf., (1956). An algorithm for quadratic programming, Naval Research Logistics Quarterly 3, pp. 95-110.

۴. Aashtiani, H.Z. (1976). The Multi-Modal Traffic Assignment Problem. Ph.D. Dissertation Thesis, MIT.

۵. جوانی، ب. (۱۳۹۰)، "الگوریتم خطی‌سازی مبتنی بر مسیر برای مسائل تخصیص ترافیک بزرگ مقیاس" ،پایان نامه کارشناسی ارشد گرایش راه و ترابری، دانشکده مهندسی عمران دانشگاه تهران.

۶. Chen, A., R. Jayakrishnan, and W.K. Tsai, (2002). Faster frank-wolfe traffic assignment with new flow update scheme. Journal of Transportation Engineering, Vol. 128, pp. 31-39.

۷. Jayakrishnan, R., Tsai, W.K., Prasker, J., and Rajadhyaksha, S. (۱۹۹۴). A faster path-based algorithm for traffic assignment, Transportation Research Record, 1443, pp.75-83.

8. Rosen. B. (1960). The gradient projection method for nonlinear programming, I. Linear constraints, J.Soc. Indust. Appl. Math., 9, pp.181-217.

9. Lemke, C. E. (1965). Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, Management Science, Vol. 11, No. 7, Series A, pp. 681-689.

1۰. Bar-Gera, H., (2014). http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp، Sep. 10.

1۱. Tehran Comprehensive Transport & Traffic studies Co, (2014). http://tctts.com/, Sep. 10.

Solving Multi-Class Traffic Assignment Problem Using Gradient Projection Linearization (GPL) Algorithm

Abbas Babazadeh [1], Amirhossein Fani [2]
1- Assistant Professor, School of Civil Engineering, University of Tehran
2- MSc student, School of Civil Engineering, University of Tehran

Abstract

Traffic assignment Problem (TAP) is studied in case of single-class or multi-class assignment. In the single-class equilibrium assignment, all travellers on a given link experience the same cost. The multi-class user equilibrium assignment problem arises if different categories of travelers, experience different cost functions. An interesting special case is happened when the different user classes perceive the same costs, but each can access only a class specific subnetwork. In this paper, this special case of multi-class assignment is solved by Frank-Wolfe algorithm and two different versions of gradient projection based linearization (GPL) Algorithm. The results of proposed algorithms are presented for the the two-class traffic assignment of Tehran network. The results are shown that GPL algorithm is much faster than FW algorithm in both single-class and multi-class assignment. Furthermore, the results of multi-class assignment are different from single-class in the network.

Keywords: ***Traffic Assignment Problem, Multi-Class Traffic Assignment Problem, Frank-Wolfe, Linearization, Gradient Projection.***